

ΘΕΩΡΗΜΑ

$$\text{Αν } f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \cdot f\left(\frac{n}{d}\right) \Rightarrow f(n) = \sum_{d|n} f(d)$$

Πχ1

Αν $f(n) = \sum_{d|n} f(d)$ να δώσει περιγραφή του στοιχείου $f(72)$ (με τη βοήθεια της f)

ΛΥΣΗ

Από τον τύπο αντιστροφής

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \cdot f\left(\frac{n}{d}\right), \quad 7^2 = 2^3 \cdot 3^2$$

Διασπείρες του 72

$$: \{1, 2, 2^2, 2^3, 3, 3^2, 2 \cdot 3, 2^2 \cdot 3, 2^3 \cdot 3, 2 \cdot 3^2, 2^2 \cdot 3^2, 2^3 \cdot 3^2\}$$

$$\text{Άρα, } f(72) = \sum_{d|72} \mu(d) f\left(\frac{72}{d}\right)$$

Από, σφαιρική Möbius:

$$0 = \mu(2^2, 2^3, 3^2, 2^2 \cdot 3, 2^3 \cdot 3, 2 \cdot 3^2, 2^2 \cdot 3^2, 2^3 \cdot 3^2)$$

$$1 = \mu(1, 2 \cdot 3)$$

$$-1 = \mu(2, 3)$$

$$\begin{aligned} f(72) &= \mu(1) \cdot f(72) + \mu(2 \cdot 3) f\left(\frac{72}{6}\right) + \mu(2) f\left(\frac{72}{2}\right) + \mu(3) f\left(\frac{72}{3}\right) \\ &= f(72) + f(12) - f(36) - f(24) \end{aligned}$$

Πχ2

Ορίσαμε $f(n) = \sum_{d|n} \varphi(d)$ πολλαπλασιαστική (γιατί φ πολλαπλασιαστική)

Γνωστό ότι:

$$f(1) = \sum_{d|1} \varphi(d) = 1$$

...

$$\begin{aligned} f(p^k) &= \sum_{d|p^k} \varphi(d) = \varphi(1) + \varphi(p) + \varphi(p^2) + \dots + \varphi(p^k) = \\ &= 1 + p-1 + p^2-p + \dots + p^k - p^{k-1} = p^k \end{aligned}$$

Αλλά, f πολλαπλασιαστική

$$\text{Εστω } n = p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r} \Rightarrow f(n) = f(p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r}) = \\ = f(p_1^{k_1}) \cdot f(p_2^{k_2}) \dots f(p_r^{k_r}) = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r} = n$$

Άρα, $f(n) = n$ (ταυτοτική)

ΕΦΑΡΜΟΓΗ:

1) $\varphi(n^2) = n \cdot \varphi(n)$

$$\text{Εστω } n = p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r} \Rightarrow n^2 = p_1^{2k_1} \dots p_r^{2k_r}$$

$$\varphi(n^2) \xrightarrow{\text{πολλαπλασιαστική}} \varphi(p_1^{2k_1}) \dots \varphi(p_r^{2k_r}) = \\ = (p_1^{2k_1} - p_1^{2k_1-1}) \dots (p_r^{2k_r} - p_r^{2k_r-1}) = \\ = p_1^{2k_1-1} (p_1 - 1) \dots p_r^{2k_r-1} (p_r - 1) \quad (1)$$

Αλλά, αν υπολογιστεί και η άλλη μέτρα:

$$n \cdot \varphi(n) = p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r} \varphi(p_1^{k_1}) \dots \varphi(p_r^{k_r}) = \\ = p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r} (p_1^{k_1-1} - p_1^{k_1-2}) \dots (p_r^{k_r-1} - p_r^{k_r-2}) = \\ = p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r} p_1^{k_1-1} (p_1 - 1) \dots p_r^{k_r-1} (p_r - 1) = \\ = p_1^{k_1+k_1-1} \dots p_r^{k_r+k_r-1} (p_1 - 1) \dots (p_r - 1) \quad (2)$$

Άρα, $(1) = (2)$.

2) Εστω p πρώτος και ≥ 2

$$\text{ΝΔΟ } \varphi(\varphi(p^k)) = p^{k-2} \cdot \varphi((p-1)^2)$$

ΜΕΤ

$$\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1} = p^{k-1}(p-1)$$

$$p \nmid p-1 \Rightarrow \varphi(\varphi(p^k)) = \varphi(p^{k-1}(p-1)) = \varphi(p^{k-1}) \cdot \varphi(p-1) = \\ = (p^{k-1} - p^{k-2}) \varphi(p-1) = p^{k-2} \cdot (p-1) \varphi(p-1) = \\ = p^{k-2} \varphi((p-1)^2)$$

παράδειγμα

$\tau(n)$ = το πλήθος των θετικών διαιρετών n

$$\tau(1) = 1, \tau(2) = 2, \tau(3) = 2, \tau(4) = 3 \dots$$

$$\text{Αν } n = p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r} \text{ τότε } \tau(n) = (k_1+1) \dots (k_r+1)$$

ΜΕΤ

Η τ είναι πολλαπλασιαστική $\Rightarrow \tau(m) = \tau(p_1^{k_1}) \dots \tau(p_e^{k_e})$

Αρκεί νβ. το $\tau(p^k) = ?$

Οι διαιρέτες του p^k είναι $p^0, p^1, p^2, \dots, p^k$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2:

ΝΔΟ $\frac{\sigma(n)}{n} = \sum_{d|n} \frac{1}{d}$

ΜΕΛΗ

Γνωστό ότι $\sigma(n)$ = το άθροισμα των διαιρετών του n
 $\sigma(1)=1$, $\sigma(2)=3$, $\sigma(3)=4$, $\sigma(4)=7$...

$\sum_{d|n} \frac{1}{d}$ και οπότε ευν $f(n) = \frac{1}{n}$

n οποια είναι ολικά πολλαπλασιαστική

Αρα, $f(n \cdot m) = f(n) \cdot f(m) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{m}$

Συνεπώς η συνάρτηση:

$F(n) = \sum_{d|n} f(d) = \sum_{d|n} \frac{1}{d}$ είναι πολλαπλασιαστική

Εάν το $n = p_1^{k_1} \dots p_e^{k_e} \Rightarrow F(n) = F(p_1^{k_1}) \dots F(p_e^{k_e})$

Θα υπολογιστεί το $F(p^k) = \sum_{d|p^k} \frac{1}{d}$

$d|p^k \Leftrightarrow d = p^m$ με $0 \leq m \leq k$

Αρα, $F(p^k) = \frac{1}{1} + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \dots + \frac{1}{p^k} = \frac{p^{k+1} - 1}{p^k(p-1)}$

(+) $\sim F(n) = \frac{p_1^{k_1+1} - 1}{p_1^{k_1}(p_1 - 1)} \dots \frac{p_e^{k_e+1} - 1}{p_e^{k_e}(p_e - 1)}$

(++) $\sim$ Ας υπολογιστεί το $\frac{\sigma(n)}{n} = \frac{\sigma(p_1^{k_1}) \dots \sigma(p_e^{k_e})}{p_1^{k_1} \dots p_e^{k_e}}$

γνωστό ότι:

$\sigma(p^k) = 1 + p + p^2 + \dots + p^k = \frac{p^{k+1} - 1}{p - 1}$

Αρα, $\frac{\sigma(n)}{n} = \frac{\frac{p_1^{k_1+1} - 1}{p_1 - 1} \dots \frac{p_e^{k_e+1} - 1}{p_e - 1}}{p_1^{k_1} \dots p_e^{k_e}} = \frac{(p_1^{k_1+1} - 1) \dots (p_e^{k_e+1} - 1)}{p_1^{k_1} \dots p_e^{k_e} (p_1 - 1) \dots (p_e - 1)}$

Άρα, $(+)=(++)\Rightarrow \frac{\sigma(n)}{n} = \sum_{d|n} \frac{1}{d}$

ή

$$\sum_{d|n} \frac{1}{d} = \sum_{d|n} \frac{d}{n} = \frac{1}{n} \sum_{d|n} d = \frac{1}{n} \sigma(n).$$

ΤΕΛΕΙΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ορισμός: Ένας φυσικός n καλείται τέλειος, εάν $\sigma(n) = 2n$

πχ

$$\sigma(1) = 1 \neq 2 \cdot 1 \quad \text{οχι τέλειος}$$

$$\sigma(2) = 1+2 \neq 2 \cdot 2 \quad \text{" "}$$

$$\sigma(3) = 1+3 \neq 2 \cdot 3 \quad \text{" "}$$

$$\sigma(4) = 1+2+4 \neq 2 \cdot 4 \quad \text{" "}$$

$$\sigma(5) = 1+5 \neq 2 \cdot 5 \quad \text{" "}$$

$$\sigma(6) = 1+2+3+6 = 2 \cdot 6 \rightarrow 6 \text{ τέλειος}$$

...

$$\sigma(28) = 2 \cdot 28 \rightarrow 28 \text{ τέλειος}$$

Η μοναδική γνωστή κλάση τέλειων αριθμών ερχεται από τον τύπο

- ΘΕΩΡΗΜΑ 1) Εάν ο αριθμός $2^{n+1}-1$ πρώτος, τότε ο φυσικός $2^n(2^{n+1}-1)$ είναι τέλειος και καλείται αριθμός του Ευκλείδη
2) Αν ο $2^n \cdot p$ είναι τέλειος με p πρώτο τότε ο p είναι της μορφής $2^{n+1}-1$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- 1) Ο $2^{n+1}-1 = p$ είναι πρώτος. Θα υπολογίσουμε το $\sigma(m)$ όπου $m = 2^n(2^{n+1}-1)$

$$\begin{aligned} \sigma(m) &= \sigma(2^n(2^{n+1}-1)) = \sigma(2^n) \cdot \sigma(2^{n+1}-1) = (2^{n+1}-1)(2^{n+1}-1+1) = \\ &= 2^{n+1}(2^{n+1}-1) = 2m \Rightarrow m \text{ τέλειος} \end{aligned}$$

- 2) Υποθέτουμε ότι ο αριθμός $2^n \cdot p$ τέλειος

$$\text{Άρα } \sigma(2^n \cdot p) = 2 \cdot 2^n \cdot p \Rightarrow \sigma(2^n) \cdot \sigma(p) = 2 \cdot 2^n \cdot p \Rightarrow$$

$$(2^{n+1} - 1)(p+1) = 2^{n+1} \cdot p \Rightarrow 2^{n+1} \cdot p + 2^{n+1} - p - 1 = 2^{n+1} \cdot p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{p = 2^{n+1} - 1}$$

Οι πρώτοι πρώτοι τελικοί:

$$6 = 2 \cdot (2 - 1)$$

$$28 = 2^3 \cdot (2^3 - 1)$$

$$496 = 2^4 \cdot (2^5 - 1)$$

$$8128 = 2^6 \cdot (2^7 - 1)$$

$$33550336 = 2^{12} \cdot (2^{13} - 1)$$

ΕΡΩΤΗΜΑ:

α. Υπάρχουν φυσικοί n με $\sigma(n) < 2n$;

Πόσοι είναι;

Αν n : πρώτος τότε $\sigma(p) = p+1 < 2p$ Άλλοι

β. Υπάρχουν φυσικοί n με $\sigma(n) > 2n$;

Πόσοι είναι;

Αν $n = 2^k \cdot 3$ $k > 1$ τότε

$$\sigma(n) = \sigma(2^k \cdot 3) = \sigma(2^k) \cdot \sigma(3) = (2^{k+1} - 1)4 = 2^{k+3} - 2^2$$

$$2n = 2 \cdot 2^k \cdot 3 = 2^{k+1} \cdot 3$$

$$\text{Όπου } 2^{k+3} - 2^2 > 2^{k+1} \cdot 3 \Rightarrow 4 \cdot 2^k > 2^{k+1} \cdot 3 + 2^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^{k+1} > 2^2 \text{ ισχύει}$$

γ. Υπάρχουν περιττοί τελικοί;

Πόσοι είναι;

Στο 1808: Αποδείχθηκε ότι αν $\exists$ περιττός τελικός $> 2 \cdot 10^6$

Στο 1955: " " " " " " $> 10^{20}$

Στο 1973: " " " " " " $> 10^{50}$

Σήμερα: " " " " " " $> 10^{100}$

nx

Αν ο n άρτιος τέλειος τότε $\sum_{d|n} \frac{1}{d} = 2$

Λύση

Επειδή είναι άρτιος τέλειος τότε είναι της μορφής:

$2^k \cdot p$ με p πρώτο και τινος $p = 2^{k+1} - 1$

(ή μπορείτε να επηρεάσετε τον τινος $\sigma(n) \cdot n = \sum_{d|n} \frac{1}{d} = 2$)

$$n = 2^k (2^{\overbrace{k+1}^{\text{πρώτος}}} - 1) = 2^k \cdot p \quad \text{με } p = 2^{k+1} - 1$$

Θελάμε τους διαιρετές

$$\{1, 2, 2^2, \dots, 2^k, p, p \cdot 2, p \cdot 2^2, \dots, 2^k \cdot p\}$$

με πλήθος $2(k+1)$

↓

$$\frac{\sigma(n)}{n} = \frac{2n}{n} = 2$$